Factoring trinomials ax²+bx+c

三项式 ax²+bx+c 的分解

Thinking map — keep it next to you while you work · 思路图——做题时放在手边

🧭 Five questions before you write

动笔前的五个问题

1. 🔎 **Given · 已知** Write a, b, c with their signs. First look for a GCF (and a negative leading coefficient) and take it out.
   > 带符号写出 a、b、c。先看有没有公因式（首项为负也算），有就先提出来。
2. 🎯 **Asked · 求什么** Two brackets that multiply back to the original. "Factor fully" means nothing inside can be factored again.
   > 要两个括号，相乘能还原原式。「完全分解」意味着括号里不能再分解。
3. ✏️ **Picture it · 画出来** A small sign table: product ac positive → same signs (the sign of b); negative → opposite signs, the bigger one takes the sign of b.
   > 画一个小符号表：积 ac 为正 → 同号（与 b 同号）；为负 → 异号，绝对值大的与 b 同号。
4. 🧰 **Tool · 用什么工具** If $a = 1$, find two numbers with product c and sum b. If $a \neq 1$, product ac and sum b, split the middle term, then group.
   > $a = 1$ 时找积为 c、和为 b 的两个数；$a \neq 1$ 时找积为 ac、和为 b 的两个数，拆中间项，再分组。
5. ✅ **Check · 检验** Expand your brackets — at least the middle term (outer + inner). It must match bx exactly, sign included.
   > 把括号展开——至少算中间项（外项＋内项）。它必须和 bx 完全一样，包括符号。

⭐ Must know

必须记住

- $a = 1$: two numbers that multiply to c and add to b.
  > $a = 1$：找两个数，积为 c、和为 b。
- $a \neq 1$: two numbers that multiply to ac and add to b; split the middle, then group.
  > $a \neq 1$：找积为 ac、和为 b 的两个数，拆中间项再分组。
- Signs: $c > 0$ → both take the sign of b; $c < 0$ → opposite signs, bigger one takes the sign of b.
  > 符号：$c > 0$ → 两数同号，与 b 同号；$c < 0$ → 两数异号，绝对值大的与 b 同号。

$$x^2 + (m+n)x + mn = (x+m)(x+n)$$

$ax^2 + bx + c$: $mn = ac$, $m + n = b$ $\Rightarrow$ $ax^2 + mx + nx + c$

🔍 Watch out for

当心

1. Signs swapped in the brackets
   > 括号里的符号放反了
2. Searching on c instead of a times c
   > 用 c 找数，而不是用 a 乘 c
3. Stopping before the GCF is out
   > 公因式没提完就停了
4. Checking the product but not the sum
   > 只验了积，没验和
5. Losing the minus sign when grouping
   > 分组时丢了负号

🌱 Small wins — tick as you go

一小步一小步——做完打勾

○ I can add and multiply negative numbers, expand two binomials, and factor $x^2 + bx + c$ when the numbers are small.

> 我会算负数的加法和乘法，会展开两个二项式相乘，会分解数字很小的 $x^2 + bx + c$。

(6′)

○ I can write a, b, c and ac in the margin and decide the signs of the two numbers before searching.

> 我能在旁边先写出 a、b、c 和 ac，并在找数之前先定好两个数的符号。

(6′)

○ I can follow, then finish, a decomposition: find the pair, split the middle term, group, check.

> 我能看懂并补全拆项法：找数对、拆中间项、分组、检验。

(10′)

○ I can factor an $ax^2 + bx + c$ trinomial on my own with at most two hints.

> 我能在最多两个提示下，独立分解一个 $ax^2 + bx + c$。

(8′)

○ I can spot the five classic factoring mistakes in someone else's work.

> 我能在别人的解答里找出因式分解的五个经典错误。

(8′)

○ I can do the Level 1–2 practice questions and check each one by expanding.

> 我能做出 1–2 级练习题，并且每道都展开检验。

(12′)

Prerequisite repair sheet

先修补救单

Do the question first. Missed it? Read the rule and the worked lines under it, then try again. · 先做题。做错了？读下面的规则和例子，再做一遍。

1. Work out $(-9)+4$.

> 计算 $(-9)+4$。

A. -13 B. -5 C. 5 D. 13

If you missed it · 如果做错了 — **Negative numbers: add, subtract, multiply**

> **负数的加减乘**

: Subtracting a negative is adding: $5-(-3)=5+3=8$. Same signs multiply to $+$, different signs to $-$. Squaring a negative is positive: $(-4)^2=16$, but $-4^2=-16$ (the square happens first).

> 减去负数等于加上它：$5-(-3)=5+3=8$。同号相乘得正，异号相乘得负。负数的平方是正的：$(-4)^2=16$，但 $-4^2=-16$（先算平方）。

1. $-7-(-2)$: change "minus negative" to "plus": $-7+2=-5$.
   > $-7-(-2)$：把「减负」改成「加」：$-7+2=-5$。
2. $(-3)(-5)=15$ (same signs), $(-3)(5)=-15$ (different signs).
   > $(-3)(-5)=15$（同号），$(-3)(5)=-15$（异号）。
3. Plugging in $x=-3$ to x^2: write brackets first, $(-3)^2=9$.
   > 把 $x=-3$ 代入 x^2：先加括号，$(-3)^2=9$。

2. Expand $(2x+3)(x-4)$.

> 展开 $(2x+3)(x-4)$。

A. $2x^2-12$ B. $2x^2+5x-12$ C. $2x^2-5x-12$ D. $2x^2-11x-12$

If you missed it · 如果做错了 — **Multiplying binomials, $(a+b)^2$**

> **二项式相乘与 $(a+b)^2$**

: Every term times every term (FOIL): $(x+3)(x-5)=x^2-5x+3x-15=x^2-2x-15$. A square has a middle term: $(x+3)^2=x^2+6x+9$, never x^2+9.

> 每一项乘每一项：$(x+3)(x-5)=x^2-5x+3x-15=x^2-2x-15$。平方会有中间项：$(x+3)^2=x^2+6x+9$，绝不是 x^2+9。

1. $(x-4)^2=(x-4)(x-4)=x^2-4x-4x+16=x^2-8x+16$.
   > $(x-4)^2=(x-4)(x-4)=x^2-4x-4x+16=x^2-8x+16$。
2. Shortcut: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ — middle term $=2\times$ first $\times$ last.
   > 捷径：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$——中间项=2×首项×末项。

3. Factor $x^2 + 7x + 10$.

分解因式 $x^2 + 7x + 10$。

A. $(x + 2)(x + 5)$ B. $(x + 1)(x + 10)$ C. $(x + 3)(x + 4)$ D. $(x - 2)(x - 5)$

If you missed it · 如果做错了 — **Factoring $x^2 + bx + c$ (product and sum)**

分解 $x^2 + bx + c$（积与和）

: Take out a common factor first. Then find two numbers that MULTIPLY to c and ADD to b: $x^2 - x - 12$ → -4 and 3 → $(x - 4)(x + 3)$. Check by expanding.

先提公因式。再找两个数，相乘等于 c、相加等于 b：$x^2 - x - 12$ → -4 和 3 → $(x - 4)(x + 3)$。展开检验。

1. $x^2 + 7x + 10$: $2 \times 5 = 10$, $2 + 5 = 7$ → $(x + 2)(x + 5)$.
   $x^2 + 7x + 10$：$2 \times 5 = 10$，$2 + 5 = 7$ → $(x + 2)(x + 5)$。
2. If $c < 0$ the two numbers have different signs; if $c > 0$ they share the sign of b.
   若 $c < 0$，两个数异号；若 $c > 0$，两个数与 b 同号。

4. Expand $-3(x - 5)$.

去括号：$-3(x - 5)$。

A. $-3x - 15$ B. $3x + 15$ C. $-3x - 5$ D. $-3x + 15$

If you missed it · 如果做错了 — **Distributing (and the minus sign)**

去括号（尤其是负号）

: Multiply EVERY term inside the bracket: $3(x - 4) = 3x - 12$. A minus in front changes every sign inside: $-(x - 5) = -x + 5$, and $2 - (x + 3) = 2 - x - 3 = -x - 1$.

括号里的每一项都要乘到：$3(x - 4) = 3x - 12$。前面是负号时，括号里每一项都变号：$-(x - 5) = -x + 5$，$2 - (x + 3) = 2 - x - 3 = -x - 1$。

1. $-2(3x - 1) = -6x + 2$ (the -1 becomes $+2$).
   $-2(3x - 1) = -6x + 2$（-1 变成 $+2$）。
2. $x(x + 2) - 3(x + 2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$.
   $x(x + 2) - 3(x + 2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$。

Answers · 答案: 1: B · 2: C · 3: A · 4: D

🔍 Common-errors sheet

常见错误单

1. Signs swapped in the brackets

括号里的符号放反了

Factor $x^2 - 2x - 24$.

分解因式 $x^2 - 2x - 24$。

1 Product -24, sum -2: the numbers are 6 and 4.

积 -24，和 -2：两个数是 6 和 4。

2 $(x + 6)(x - 4)$

✍ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

2. Searching on c instead of a times c

用 c 找数，而不是用 a 乘 c

Factor $3x^2 + 11x + 6$.

分解因式 $3x^2 + 11x + 6$。

1 Need product 6 and sum 11.

要找积为 6、和为 11 的两个数。

2 Pairs of 6 add to 7 or 5 — none adds to 11, so it does not factor.

6 的因数对和为 7 或 5——没有和为 11 的，所以不能分解。

✍ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

3. Stopping before the GCF is out

公因式没提完就停了

Factor fully: $3x^2 + 15x + 18$.

完全分解：$3x^2 + 15x + 18$。

1 $ac = 54$, sum 15: 9 and 6.

$ac = 54$，和 15：9 和 6。

2 $3x^2 + 9x + 6x + 18 = 3x(x + 3) + 6(x + 3)$

3 $= (x + 3)(3x + 6)$. Done.

$= (x + 3)(3x + 6)$。完成。

✍ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

4. Checking the product but not the sum

> **只验了积，没验和**

Factor $x^2 + 5x - 24$.

> 分解因式 $x^2 + 5x - 24$。

1 $12 \cdot (-2) = -24$ ✓

2 So $(x + 12)(x - 2)$.

> 所以是 $(x + 12)(x - 2)$。

✍️ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

5. Losing the minus sign when grouping

> **分组时丢了负号**

Factor $6x^2 + x - 2$.

> 分解因式 $6x^2 + x - 2$。

1 $ac = -12$, sum 1: 4 and -3. Split: $6x^2 + 4x - 3x - 2$.

> $ac = -12$，和 1：4 和 -3。拆项：$6x^2 + 4x - 3x - 2$。

2 Group: $2x(3x + 2) - 1(3x - 2)$

> 分组：$2x(3x + 2) - 1(3x - 2)$

3 The brackets differ, so it does not factor.

> 两个括号不一样，所以不能分解。

✍️ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

Key (fold this part back) · 答案（可以折起来）

1. **line · 第 2 —** The right pair was found but the minus went on the wrong one. $(x+6)(x-4)$ has middle term $+2x$.
   > 数对找对了，但负号给错了数。$(x+6)(x-4)$ 的中间项是 $+2x$。
   The bigger number takes the sign of $b=-2$: -6 and $+4$, so $(x-6)(x+4)$. Check: $4x-6x=-2x$ ✓.
   > 绝对值大的数与 $b=-2$ 同号：-6 和 $+4$，所以 $(x-6)(x+4)$。检验：$4x-6x=-2x$ ✓。
2. **line · 第 1 —** The $a=1$ shortcut was used when $a=3$. With $a\neq 1$ the product must be ac.
   > $a=3$ 时却用了 $a=1$ 的捷径。$a\neq 1$ 时积必须是 ac。
   $ac=18$, sum 11: 9 and 2. $3x^2+9x+2x+6=3x(x+3)+2(x+3)=(x+3)(3x+2)$.
   > $ac=18$，和 11：9 和 2。$3x^2+9x+2x+6=3x(x+3)+2(x+3)=(x+3)(3x+2)$。
3. **line · 第 3 —** The brackets multiply back correctly, so it felt finished. But $3x+6$ still has a common factor 3; skipping the GCF at the start is what let it hide.
   > 括号乘回去是对的，所以觉得做完了。可是 $3x+6$ 里还有公因式 3；一开始没提公因式，它就藏起来了。
   GCF first: $3(x^2+5x+6)=3(x+2)(x+3)$.
   > 先提公因式：$3(x^2+5x+6)=3(x+2)(x+3)$。
4. **line · 第 2 —** The first pair with the right product was taken. But $12+(-2)=10$, not 5 — both conditions must hold.
   > 拿到第一对积正确的数就用了。可 $12+(-2)=10$，不是 5——两个条件都要满足。
   List pairs of -24 and their sums: 8 and -3 give 5. So $(x+8)(x-3)$.
   > 列出积为 -24 的数对和它们的和：8 和 -3 的和是 5。所以 $(x+8)(x-3)$。
5. **line · 第 2 —** Taking out -1 changes EVERY sign in the group: $-3x-2=-1(3x+2)$. Only the first sign was changed.
   > 提出 -1 时，组里「每一项」都要变号：$-3x-2=-1(3x+2)$。这里只变了第一项的号。
   $2x(3x+2)-1(3x+2)=(3x+2)(2x-1)$. Check: $-3x+4x=x$ ✓.
   > $2x(3x+2)-1(3x+2)=(3x+2)(2x-1)$。检验：$-3x+4x=x$ ✓。