Radical equations & extraneous roots

根式方程与增根

Thinking map — keep it next to you while you work · 思路图——做题时放在手边

🧭 Five questions before you write

动笔前的五个问题

1. 🔎 **Given · 已知** What is under the root, and what is on the other side? Write the restriction: inside ≥ 0, and if the other side has x, it must be ≥ 0 too.
   > 根号里是什么？另一边是什么？写出限制条件：根号内 ≥ 0；另一边含 x 时它也必须 ≥ 0。
2. 🎯 **Asked · 求什么** Every x that makes the ORIGINAL equation true. There may be two, one or none.
   > 让原方程成立的所有 x——可能有两个、一个，或者没有。
3. ✏️ **Picture it · 画出来** Two graphs, $y =$ left side and $y =$ right side; answers are where they meet. A root curve can never meet a negative number.
   > 两个图象：$y =$左边、$y =$右边，答案就是交点。根式曲线永远碰不到负数。
4. 🧰 **Tool · 用什么工具** Isolate the radical, square BOTH WHOLE sides, then solve the linear or quadratic equation you get.
   > 先孤立根式，再把两边「整体」平方，然后解得到的一次或二次方程。
5. ✅ **Check · 检验** Put every answer back into the ORIGINAL equation. Mark ✓ or ×; reject the × ones (extraneous).
   > 把每个答案代回原方程，标 ✓ 或 ×；× 的是增根，舍去。

⭐ Must know

必须记住

- Restrictions → ISOLATE the radical → raise to the index → solve → CHECK in the original.
  > 写限制条件 → 孤立根式 → 两边乘方 → 解方程 → 代回原方程检验。
- Squaring can create extraneous roots: reject any root that fails the original.
  > 平方可能产生增根：不满足原方程的根要舍去。
- $\sqrt{\cdots} \geq 0$: so $\sqrt{x} = -4$ has no solution, and $\sqrt{\cdots} = x - 3$ needs $x \geq 3$.
  > $\sqrt{\cdots} \geq 0$：所以 $\sqrt{x} = -4$ 无解，$\sqrt{\cdots} = x - 3$ 要求 $x \geq 3$。

$$\sqrt{A} = B \;\Rightarrow\; A = B^2, \quad \text{valid only if } B \geq 0$$

🔍 Watch out for

当心

1. Squaring before isolating
   > 没孤立就平方
2. Keeping the extraneous root
   > 留下了增根
3. Squaring a binomial without the middle term
   > 二项式平方漏了中间项
4. Forgetting to square the coefficient
   > 忘了把系数平方
5. Solving "root = negative number"
   > 把「根式＝负数」硬解

🌱 Small wins — tick as you go

一小步一小步——做完打勾

- ○ I can expand $(x-a)^2$ and solve a quadratic by factoring.
  > 我会展开 $(x-a)^2$，会用因式分解解二次方程。

(5′)

- ○ I can ask the five starting questions for a radical equation.
  > 我能对根式方程问出五个入手问题。

(5′)

- ○ I can follow, then finish, an isolate–square–check solution.
  > 我能看懂并补全「孤立—平方—检验」的解法。

(8′)

- ○ I can solve one on my own with at most two hints.
  > 我能在最多两个提示下独立解一道。

(8′)

- ○ I can spot the five classic mistakes in someone else's work.
  > 我能在别人的解答里找出五个经典错误。

(8′)

- ○ I can do the Level 1–2 practice questions.
  > 我能做出 1–2 级练习题。

(10′)

Prerequisite repair sheet

先修补救单

Do the question first. Missed it? Read the rule and the worked lines under it, then try again. · 先做题。做错了？读下面的规则和例子，再做一遍。

1. Expand $(x-3)^2$.

> 展开 $(x-3)^2$。

A. x^2-9 B. x^2+9 C. x^2-6x+9 D. x^2-3x+9

If you missed it · 如果做错了 — **Multiplying binomials, $(a+b)^2$**

> **二项式相乘与 $(a+b)^2$**

: Every term times every term (FOIL): $(x+3)(x-5)=x^2-5x+3x-15=x^2-2x-15$. A square has a middle term: $(x+3)^2=x^2+6x+9$, never x^2+9.

> 每一项乘每一项：$(x+3)(x-5)=x^2-5x+3x-15=x^2-2x-15$。平方会有中间项：$(x+3)^2=x^2+6x+9$，绝不是 x^2+9。

1. $(x-4)^2=(x-4)(x-4)=x^2-4x-4x+16=x^2-8x+16$.
   > $(x-4)^2=(x-4)(x-4)=x^2-4x-4x+16=x^2-8x+16$。
2. Shortcut: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ — middle term $=2\times$ first $\times$ last.
   > 捷径：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$——中间项=2×首项×末项。

2. Solve $x^2-7x+10=0$.

> 解 $x^2-7x+10=0$。

A. $x=-2$ or $x=-5$ B. $x=2$ or $x=5$ C. $x=1$ or $x=10$ D. $x=7$ or $x=10$

If you missed it · 如果做错了 — **Factoring x^2+bx+c (product and sum)**

> **分解 x^2+bx+c（积与和）**

: Take out a common factor first. Then find two numbers that MULTIPLY to c and ADD to b: x^2-x-12 → -4 and 3 → $(x-4)(x+3)$. Check by expanding.

> 先提公因式。再找两个数，相乘等于 c、相加等于 b：x^2-x-12 → -4 和 3 → $(x-4)(x+3)$。展开检验。

1. $x^2+7x+10$: $2\times 5=10$, $2+5=7$ → $(x+2)(x+5)$.
   > $x^2+7x+10$：$2\times 5=10$，$2+5=7$ → $(x+2)(x+5)$。
2. If $c<0$ the two numbers have different signs; if $c>0$ they share the sign of b.
   > 若 $c<0$，两个数异号；若 $c>0$，两个数与 b 同号。

3. What is $\sqrt{9+16}$?

> $\sqrt{9+16}$ 等于多少?

A. 7 B. 5 C. 25 D. $\sqrt{7}$

If you missed it · 如果做错了 — **Perfect squares and square roots**

> **完全平方数与平方根**

: Know the squares $1,4,9,\ldots,225$. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, so $\sqrt{50}=\sqrt{25}\sqrt{2}=5\sqrt{2}$. But $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$: $\sqrt{9+16}=5$, not 7. $\sqrt{x}$ means the non-negative root.

> 记住 $1,4,9,\ldots,225$ 这些平方数。$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$，所以 $\sqrt{50}=\sqrt{25}\sqrt{2}=5\sqrt{2}$。但 $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$：$\sqrt{9+16}=5$，不是 7。$\sqrt{x}$ 表示非负的那个根。

1. $\sqrt{72}$: biggest square factor is 36 → $6\sqrt{2}$.
   > $\sqrt{72}$：最大的平方因数是 36 → $6\sqrt{2}$。
2. $x^2=49$ has TWO answers $x=\pm 7$, but $\sqrt{49}=7$ only.
   > $x^2=49$ 有两个解 $x=\pm 7$，但 $\sqrt{49}$ 只等于 7。

4. Evaluate $\sqrt{x+5}-x$ when $x=-1$.

> 当 $x=-1$ 时，求 $\sqrt{x+5}-x$ 的值。

A. 1 B. 3 C. -3 D. 5

If you missed it · 如果做错了 — **Negative numbers: add, subtract, multiply**

> **负数的加减乘**

: Subtracting a negative is adding: $5-(-3)=5+3=8$. Same signs multiply to $+$, different signs to $-$. Squaring a negative is positive: $(-4)^2=16$, but $-4^2=-16$ (the square happens first).

> 减去负数等于加上它：$5-(-3)=5+3=8$。同号相乘得正，异号相乘得负。负数的平方是正的：$(-4)^2=16$，但 $-4^2=-16$（先算平方）。

1. $-7-(-2)$: change "minus negative" to "plus": $-7+2=-5$.
   > $-7-(-2)$：把「减负」改成「加」：$-7+2=-5$。
2. $(-3)(-5)=15$ (same signs), $(-3)(5)=-15$ (different signs).
   > $(-3)(-5)=15$（同号），$(-3)(5)=-15$（异号）。
3. Plugging in $x=-3$ to x^2: write brackets first, $(-3)^2=9$.
   > 把 $x=-3$ 代入 x^2：先加括号，$(-3)^2=9$。

Answers · 答案: 1: C · 2: B · 3: B · 4: B

🔍 Common-errors sheet

常见错误单

1. Squaring before isolating

> **没孤立就平方**

Solve $\sqrt{x+5}+1=x$.

> 解 $\sqrt{x+5}+1=x$。

1 Square each term: $(x+5)+1=x^2$

> 每一项平方：$(x+5)+1=x^2$

2 $x^2-x-6=0$

3 $x=3$ or $x=-2$

> $x=3$ 或 $x=-2$

✍ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

2. Keeping the extraneous root

> **留下了增根**

Solve $\sqrt{2x+6}=x+1$.

> 解 $\sqrt{2x+6}=x+1$。

1 Square: $2x+6=x^2+2x+1$

> 平方：$2x+6=x^2+2x+1$

2 $x^2=5$

3 $x=\sqrt{5}$ or $x=-\sqrt{5}$, both answers.

> $x=\sqrt{5}$ 或 $x=-\sqrt{5}$，两个都是解。

✍ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

3. Squaring a binomial without the middle term

> 二项式平方漏了中间项

Solve $\sqrt{x+4} = x - 2$.

> 解 $\sqrt{x+4} = x - 2$。

1 Square: $x + 4 = x^2 + 4$

> 平方：$x + 4 = x^2 + 4$

2 $x^2 - x = 0$

3 $x = 0$ or $x = 1$

> $x = 0$ 或 $x = 1$

✍ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

4. Forgetting to square the coefficient

> 忘了把系数平方

Solve $3\sqrt{x-1} = x + 1$.

> 解 $3\sqrt{x-1} = x + 1$。

1 Square: $3(x - 1) = (x + 1)^2$

> 平方：$3(x - 1) = (x + 1)^2$

2 $x^2 - x + 4 = 0$

3 No real solution.

> 无实数解。

✍ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

5. Solving "root = negative number"

> **把「根式＝负数」硬解**

Solve $\sqrt{x-3}+5=2$.

> 解 $\sqrt{x-3}+5=2$。

1 Isolate: $\sqrt{x-3}=-3$

> 孤立：$\sqrt{x-3}=-3$

2 Square: $x-3=9$

> 平方：$x-3=9$

3 $x=12$

✍ Which line goes wrong first, and why? · 哪一行最先出错？为什么？

Key (fold this part back) · 答案（可以折起来）

1. **line · 第 1 —** You cannot square term by term. $(\sqrt{x+5}+1)^2$ has a middle term $2\sqrt{x+5}$.
   > 不能逐项平方。$(\sqrt{x+5}+1)^2$ 有中间项 $2\sqrt{x+5}$。

   Isolate first: $\sqrt{x+5}=x-1$, then $x+5=x^2-2x+1$, $x^2-3x-4=0$, $x=4$ or -1; only $x=4$ checks.
   > 先孤立：$\sqrt{x+5}=x-1$，再 $x+5=x^2-2x+1$，$x^2-3x-4=0$，$x=4$ 或 -1；只有 $x=4$ 通过检验。
2. **line · 第 3 —** Squaring can create a fake root. At $x=-\sqrt{5}$ the right side $x+1$ is negative, but a square root never is.
   > 平方会造出假根。$x=-\sqrt{5}$ 时右边 $x+1$ 是负数，而平方根不会是负数。

   Check both in the original: only $x=\sqrt{5}$ works.
   > 把两个都代回原方程：只有 $x=\sqrt{5}$ 成立。
3. **line · 第 1 —** $(x-2)^2$ is x^2-4x+4, not x^2+4.
   > $(x-2)^2=x^2-4x+4$，不是 x^2+4。

   $x+4=x^2-4x+4$, $x^2-5x=0$, $x=0$ or 5; only $x=5$ checks.
   > $x+4=x^2-4x+4$，$x^2-5x=0$，$x=0$ 或 5；只有 $x=5$ 通过检验。
4. **line · 第 1 —** $(3\sqrt{x-1})^2=9(x-1)$: the 3 is squared too.
   > $(3\sqrt{x-1})^2=9(x-1)$：系数 3 也要平方。

   $9x-9=x^2+2x+1$, $x^2-7x+10=0$, $x=2$ or 5; both check ($3=3$, $6=6$).
   > $9x-9=x^2+2x+1$，$x^2-7x+10=0$，$x=2$ 或 5；两个都通过检验（$3=3$，$6=6$）。
5. **line · 第 2 —** A square root is never negative, so $\sqrt{x-3}=-3$ is impossible. Squaring hides that.
   > 平方根不会是负数，所以 $\sqrt{x-3}=-3$ 不可能成立。平方把这一点掩盖了。

   Stop at line 1: no solution. (Check: $\sqrt{9}+5=8\neq 2$.)
   > 在第 1 行就停：无解。（检验：$\sqrt{9}+5=8\neq 2$。）